INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

Association d'éducation
Organisme d'intérêt général à caractère éducatif
Établissement libre d'enseignement supérieur

CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

MATHÉMATIQUES 1

Option générale

DURÉE: 4 heures — COEFFICIENT: 5

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Soit p un entier naturel premier. On définit les ensembles suivants:

$A = \{1, 2, \ldots, p\}$

$B = A \setminus \{1\} = \{2, 3, \ldots, p\}$

G : ensemble des permutations de A

H : ensemble des permutations de B

$S = \{s \in G \ / \ s^p = Id_A\}$

$S^* = S \setminus \{Id_A\}$

Pour tout $s \in G$, $\text{Inv}(s) = \{k \in A \ / \ s(k) = k\}$

On précise que si E et F sont deux ensembles quelconques, la notation $E \setminus F$ désigne l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F.

Les puissances entières naturelles d'une permutation de A s'entendent au sens du produit de composition, avec les conventions habituelles:

$$s^0 = Id_A \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^*,\ s^n = s \circ s^{n-1}$$

Il est utile de remarquer d'emblée les inclusions suivantes:

$$B \subset A$$

$$\text{Inv}(s) \subset A$$

$$S^* \subset S \subset G$$

1° Soit $s \in S$. Démontrer l'équivalence:

$$[i \in A \setminus \text{Inv}(s)] \iff [s(i) \in A \setminus \text{Inv}(s)]$$

2° Soit $s \in S$. On suppose que Inv (s) n'est ni vide, ni égal à A.

a) Soit $i_o \in A \setminus \text{Inv}(s)$. On considère la suite finie $(i_o, s(i_o), s^2(i_o), \ldots, s^{p-1}(i_o))$.
Montrer que cette suite contient au moins deux termes égaux et en déduire l'existence d'au moins un élément j de A tel que:

$$s^j(i_o) = i_o$$

b) Soit j_o le plus petit élément de A tel que $s^{j_o}(i_o) = i_o$.
Montrer que $o < j_o < p$ puis, que $j_o = 1$.

c) En déduire que l'hypothèse faite sur Inv (s) au début de la question est invraisemblable et que

$$[s \neq Id_A] \iff [\text{Inv}(s) = \emptyset]$$

d) En déduire que si $s \in S^*$, la suite finie

$$(i, s(i), s^2(i), \ldots, s^{p-1}(i))$$

contient exactement les p éléments de A, quel que soit l'élément i de A.

3° A tout $s \in S^*$, on associe l'application h_s de B dans B définie par:

$$h_s(i) = s^{i-1}(1) \qquad \text{pour tout } i \in B$$

Montrer que $h_s \in H$ quel que soit $s \in S^*$.

4° A tout $h \in H$, on associe l'application s_h de A dans A définie par:

$$s_h(1) = h(2)$$
$$s_h[(h(i)] = h(i+1) \qquad \text{pour } 1 \leqslant i < p$$
$$s_h[h(p)] = 1$$

Démontrer que, quel que soit $h \in H$
a) $s_h \in G$
b) $s_h \in S^*$

5° Soit $\psi_1 : S^* \longrightarrow H$
$s \longmapsto \psi_1(s) = h_s$
et $\psi_2 : H \longrightarrow S^*$
$h \longmapsto \psi_2(h) = s_h$

Montrer que ψ_1 et ψ_2 sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

6° En déduire le cardinal de S.

Pour les trois questions suivantes, on identifie A à $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$. Les opérations + et − seront donc celles de $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ et, par commodité, l'élément p sera noté O.

7° A tout couple $(s, k) \in S \times A$, on associe l'application de A dans A notée $\binom{s}{k}$ et définie par:

$$\forall i \in A,\ \binom{s}{k}(i) = s(i-k) + k$$

a) Montrer que, quel que soit $\binom{s}{k} \cdot \binom{s'}{k'} \in S$.

b) On désigne par $\mathcal{R}$ la relation définie sur S par:

$$[s_1 \,\mathcal{R}\, s_2] \iff [\exists k \in A \text{ tel que } s_1 = \binom{s_2}{k}]$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur S.

8° Soit $(s, k, k') \in S \times A^2$ et tel que $k \neq k'$

a) Démontrer que:

$$\left[\binom{s}{k} = \binom{s}{k'}\right] \Leftrightarrow \left[s = \binom{s}{k'-k}\right]$$

I P 238 I

$$\left|\binom{s}{k} \quad \binom{s}{k'}\right| \Leftrightarrow \left[\forall\, i \in \Lambda,\ s = \binom{s}{i(k'-k)}\right]$$

c) Démontrer l'équivalence :

$$\left[\binom{s}{k} = \binom{s}{k'}\right] \Leftrightarrow \left[s = \binom{s}{1} = \binom{s}{2} = \ldots = \binom{s}{p-1}\right]$$

b) En déduire que le cardinal d'une classe d'équivalence quelconque de $\mathcal{R}$ ne peut être que 1 ou p.

9° a) Montrer que si $s \in S$ on a :

$$\left[s = \binom{s}{1}\right] \Leftrightarrow \left[\exists\, a \in \Lambda \text{ tel que, } \forall i \in \Lambda,\ s(i) = i + a\right]$$

b) En déduire que Card $S \equiv 0 \bmod p$ (Wilson).

II

Dans cette partie, on supposera que le nombre premier p n'est pas égal à 2.

On désigne par $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_p})$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et par s un élément de S^* fixé une fois pour toutes.

A tout $\sigma \in G$, on associe l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ noté $\hat{\sigma}$ et défini par :

$$\forall\, i \in \Lambda,\ \hat{\sigma}(\vec{e_i}) = \vec{e}_{\sigma(i)}$$

et on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ.

On rappelle que le déterminant d'une matrice carrée d'ordre p $(x_{i,j})$ est :

$$det(x_{i,j}) = \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)\, x_{1,\sigma(1)} \times x_{2,\sigma(2)} \times \ldots \times x_{p,\sigma(p)}$$

Enfin, dans la notation matricielle $(x_{i,j})$, i représente l'indice de ligne et j l'indice de colonne.

1° Montrer que $\hat{\sigma}$ est toujours un automorphisme de $\mathbb{R}^p$

2° Montrer que pour $(\sigma, \xi) \in G^2$ on a :

$$\widehat{\sigma \circ \xi} = \hat{\sigma} \circ \hat{\xi}$$

3° a) Montrer que $det(\hat{\sigma}) = \varepsilon(\sigma)$

b) Calculer $det(\hat{s})$ et en déduire $\varepsilon(s)$

4° Soit $\sigma \in G$. On pose $L(\sigma) = \{ i \in \Lambda \ /\ \sigma(i) = s(i) \}$

a) Montrer que $L(\sigma) \cap Inv(\sigma) = \emptyset$

b) Montrer que

$$[L(\sigma) \cup Inv(\sigma) = \Lambda] \Rightarrow [L(\sigma) = \emptyset \text{ ou } Inv(\sigma) = \emptyset]$$

c) En déduire le polynôme caractéristique de $\hat{s}$.

5° Montrer que $\hat{s}$ ne possède qu'une seule valeur propre réelle (à préciser) et déterminer l'espace propre associé.

6° Soit $\pi = \sum_{i \in \Lambda} \widehat{s^i}$

a) Déterminer la matrice de π relativement à $\mathcal{B}$.

b) Cette matrice est-elle diagonalisable ?

c) Déterminer le noyau et l'image de π.

d) Calculer les valeurs propres de π.

e) Déterminer la matrice de π^n relativement à $\mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

7° Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui commute avec $\hat{s}$ c'est à dire tel que :

$$\hat{s} \circ \varphi = \varphi \circ \hat{s}$$

Soit $M = (a_{i,j})$ et $N = (b_{i,j})$ les matrices respectives de $\hat{s}$ et de φ relativement à $\mathcal{B}$.

a) Calculer $a_{i,j}$

b) Montrer que pour tout $(i, j) \in \Lambda^2$ on a l'égalité

$$b_{s(i),j} = b_{i,s(j)}$$

c) Un couple (i, j) de Λ^2 étant fixé, montrer qu'il existe un entier $k \in \Lambda$ tel que :

$$i = s^{k+1}(j)$$

et montrer que les p coefficients de la matrice N occupant les mêmes positions que les 1 de la matrice M^k sont tous égaux à $b_{s(i),j}$

d) En déduire l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ qui commutent avec $\hat{s}$.

8° Quels sont les éléments de G qui commutent avec s ?